

Master 2 en Mathématiques Fondamentales 2026/2027

Probabilités

Université de Strasbourg

1 Présentation du parcours

Le master de Mathématiques Fondamentales est conçu à la fois comme une ouverture aux études doctorales et comme un diplôme terminal. Son objectif essentiel est l'initiation à la recherche en mathématiques. A l'issue de sa formation, l'étudiant sera à même de comprendre les bases, les grandes orientations, et les questions fondamentales qui orientent la recherche actuelle dans le domaine des Probabilités, ainsi que leurs liens avec d'autres champs des mathématiques. Les étudiants ayant montré une motivation et une aptitude suffisantes ont vocation à entreprendre par la suite une recherche personnelle, sous la forme d'une thèse de doctorat dirigée par un mathématicien confirmé.

Ce programme de Master 2 en probabilités propose une formation solide et progressive en calcul stochastique et en mécanique statistique, complétée par des cours avancés qui ouvrent sur des thématiques de recherche actuelles, qui s'inscrivent profondément dans les domaines de recherche strasbourgeois et mulhousien en probabilités. Le programme s'articule autour de **deux cours fondamentaux obligatoires** de 50h chacun, suivis de **deux cours avancés choisis parmi les trois proposés**, de 50h chacun.

Le parcours a été pensé pour offrir une compréhension approfondie des processus stochastiques continus et de leurs applications (équations différentielles stochastiques, changements de mesure, trajectoires browniennes), ainsi qu'une immersion dans les phénomènes collectifs modélisés par la mécanique statistique (transitions de phase, dynamiques markoviennes). A ce titre, il propose les deux cours fondamentaux obligatoires de 50h chacun :

- **Introduction au Calcul Stochastique**, par Vlada Limic, Lionel Lenotre et Carlo Bellingeri
- **Introduction à la Mécanique Statistique**, par Jean Bérard et Xiaolin Zeng

Ces deux modules obligatoires sont suivis de cours avancés qui reflètent la richesse des interactions entre probabilités, analyse, géométrie et modélisation. La diversité des thèmes abordés offre une ouverture vers de nombreux domaines de recherche, et prépare les étudiants à aborder des problèmes interdisciplinaires de grande actualité. Chaque étudiant devra choisir deux parmi les trois cours avancés proposés, de 50h chacun :

- **Outils Avancés pour la Mécanique Statistique**, par Barbara Dembin et Laure Marêché
- **Modèles stochastiques appliqués aux systèmes de type blockchain et aux dynamique de population**, par Pierre-Olivier Goffard et Denis Villemonais
- **Théorie du transport optimal et Probabilités**, par Nicolas Juillet, Jean Bérard et Denis Villemonais

La seconde partie de l'année est consacrée à la rédaction d'un mémoire de recherche en probabilités et ses interactions avec les autres champs disciplinaires.

2 Cours fondamentaux

2.1 Introduction au Calcul Stochastique

Intervenants : Vlada Limic, Lionel Lenotre, et Carlo Bellingeri

Ce cours a pour objectif de donner une introduction cohérente et progressive aux processus stochastiques continus et aux outils fondamentaux du calcul stochastique. Nous mettrons en lumière aussi bien les aspects de construction rigoureuse que les applications concrètes, en nous appuyant sur de nombreux exemples et calculs explicites.

Le programme s'articule autour de deux grands volets complémentaires.

1. Du mouvement brownien aux équations stochastiques : intégrales, formules et changements de mesure.
 - Construction et cadres de base : trajectoires du mouvement brownien via la construction de Lévy ; processus stochastiques en temps continu, filtrations continues et temps d'arrêt comme limites de modèles discrets.
 - Intégrale stochastique d'Itô : définie à la fois par l'isométrie d'Itô et comme limite de schémas numériques de type Euler.
 - Formule d'Itô et applications : calcul différentiel stochastique et mise en œuvre sur des exemples explicites.
 - Équations différentielles stochastiques : résultats fondamentaux sur les EDS et illustrations concrètes.
 - Thèmes avancés (fin du cours) : temps local et formule d'occupation, formule d'Itô–Tanaka, et lien entre mouvement brownien et équations paraboliques via la théorie des semi-groupes.
2. Martingales, convergence faible et trajectoires browniennes.
 - Martingales discrètes et passage au continu : rappels et approfondissements (temps d'arrêt, théorème de l'arrêt optionnel, lemme des montées, inégalités de Doob, intégrabilité uniforme, convergence) et introduction de l'intégrale stochastique discrète.
 - Convergence en loi et théorèmes de base : théorèmes de Portmanteau et de Prokhorov, convergence faible dans l'espace $C[0, K]$, et théorème de Donsker.
 - Propriétés des trajectoires browniennes : régularité, comportement typique, introduction et étude du pont brownien.

- Changements de mesure : théorème de Girsanov formulé dans un cadre général, au-delà du seul mouvement brownien.
- Thèmes avancés (fin du cours) : principe de réflexion pour le mouvement brownien et le pont brownien ; extension du théorème de Donsker au pont brownien.

Ce plan de cours permettra de se familiariser avec les fondements théoriques du calcul stochastique, tout en donnant une vision claire de ses applications centrales : équations différentielles stochastiques, changement de mesure, propriétés des trajectoires browniennes et équations aux dérivées partielles.

Références :

- Karatzas, I. & S. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Vol. 113. Springer, 2014.
- Le Gall, J. F.. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Vol. 71. Springer, 2013.
- Revuz, D. & M. Yor.. *Continuous martingales and Brownian motion*. Vol. 293. Springer 2013.

2.2 Introduction à la mécanique statistique

Intervenants : Jean Bérard et Xiaolin Zeng

La mécanique statistique vise à expliquer les phénomènes physiques produits par un grand nombre de particules en interaction. En particulier, des transitions de phase pour certaines propriétés physiques d'un matériau (telle que sa magnétisation ou sa conductivité) dépendant de paramètres ambiants (la température ou la pression par exemple) ont été démontrées dans beaucoup de modèles physiques.

Dans ce cours introductif, nous allons aborder :

- les aspects statiques (description de systèmes à l'équilibre), à partir de la transition de phase du modèle de Lenz-Ising. Nous introduirons par la même occasion le langage de la mécanique statistique, en abordant des concepts comme l'énergie libre, la fonction de partition, la magnétisation, la longueur de corrélation,
- les aspects dynamiques (description de systèmes hors équilibre), via l'étude des dynamiques markoviennes dont les lois stationnaires décrivent des systèmes à l'équilibre (dynamique de Langevin, de Glauber, et plus généralement dynamique de systèmes de particules en interaction). Nous discuterons notamment les questions de convergence vers l'équilibre.

Références :

- Friedli, S. & Velenik, Y. (2017). *Statistical mechanics of lattice systems : a concrete mathematical introduction*. Cambridge University Press.
- Snell, R. & Kindermann J. (1980) *Markov random fields and their applications*. American Mathematical Society.

3 Cours avancés

3.1 Outils avancés pour la mécanique statistique

Intervenants : Barbara Dembin et Laure Marêché

Ce cours a pour objectif de présenter une sélection d'outils plus ou moins classiques en probabilités, en mettant l'accent sur leur application à des modèles issus de la mécanique statistique. Il s'agit d'une introduction à des techniques analytiques et probabilistes variées, illustrées principalement à travers l'étude du *modèle de percolation de premier passage* — un modèle central en géométrie aléatoire. Dans ce modèle, un temps aléatoire est attribué indépendamment à chaque arête d'un réseau, et l'on s'intéresse à la structure métrique induite par ces temps.

Nous explorerons notamment les notions suivantes :

- **Sous-additivité** : un principe important en mécanique statistique, utilisé notamment pour démontrer l'existence de constantes limites via le *théorème ergodique sous-additif*. Cet outil est essentiel dans l'analyse de comportements asymptotiques de grande échelle.
- **Concentration de mesure** : cet outil permet de quantifier la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte significativement de sa valeur moyenne. Il est fondamental pour estimer la stabilité des phénomènes aléatoires autour de leur comportement typique.
- **Théorie des grandes déviations** : elle constitue un cadre asymptotique rigoureux permettant d'estimer la probabilité d'événements rares, correspondant à des fluctuations d'ordre macroscopique autour de la moyenne.
- **Sensibilité au bruit** : ce concept vise à évaluer à quel point une fonction d'un grand nombre de variables indépendantes peut être influencée par de petites perturbations. Il joue un rôle important dans l'étude des transitions de phase et des propriétés critiques des modèles. Nous étudierons en particulier le lien entre sensibilité au bruit et variance.

Références :

- Auffinger, A., Damron, M. & Hanson, J. (2017) *50 years of first-passage percolation*. American Mathematical Society.
- Boucheron, S., Lugosi G. & Massart, P. (2013) *Concentration Inequalities : A Nonasymptotic Theory of Independence*. Oxford Academic.

3.2 Modèles stochastiques appliqués aux systèmes de type blockchain et aux dynamiques de population

Intervenants : Pierre-Olivier Goffard et Denis Villemonais

Ce cours, qui s'intéresse à la modélisation mathématique appliquée via des modèles

stochastiques, se divise en deux parties. La première se concentre sur les systèmes de type blockchain, et la seconde sur les modèles de dynamique de population.

La première partie explorera les liens entre les systèmes blockchain et les modèles stochastiques, en mettant l'accent sur l'analyse mathématique de la sécurité, de la décentralisation et de l'efficacité des blockchains. Il débutera par une introduction aux concepts fondamentaux de la blockchain, à ses applications (comme la finance décentralisée) et aux protocoles de consensus (preuve de travail, preuve d'enjeu, etc.). L'aspect sécurité sera abordé via des outils de probabilité appliquée, comme les marches aléatoires et les chaînes de Markov, pour étudier les vulnérabilités (ex. : double dépense). La décentralisation sera quantifiée en modélisant la distribution du pouvoir décisionnel, à l'aide de modèles d'urnes (preuve d'enjeu) et de la théorie du risque en assurance (preuve de travail). Pour l'efficacité, un modèle de files d'attente permettra d'évaluer le débit et la latence des transactions. Enfin, le cours se penchera sur les cycles de rendement des cryptomonnaies, en utilisant des chaînes de Markov cachées pour modéliser les phases haussières et baissières du marché, avec estimation bayésienne à partir de données réelles (Bitcoin).

La seconde partie de ce cours s'intéressera à la modélisation de l'évolution de populations dans le temps, en tenant compte des mécanismes aléatoires à l'échelle individuelle. Nous commencerons par une présentation des modèles de naissance et mort, qui décrivent à l'aide de chaînes de Markov en temps continu l'évolution aléatoire du nombre d'individus dans une population. Nous pencherons sur les limites de grande population et les approximations déterministes, telles que les équations de Lotka-Volterra ou les équations de diffusion stochastiques (SDEs).

Références :

- Nakamoto S., (2008) Bitcoin : A peer-to-peer electronic cash system. *Available at <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>*.
- Lipton A. & Treccani A. (2021) *Blockchain and Distributed Ledgers*. World Scientific.
- Saleh F. (2020) Blockchain without waste : Proof-of-stake. *The Review of Financial Studies*, vol. 34.
- Goffard, P.-O. (2019) Fraud risk assessment within blockchain transactions. *Advances in Applied Probability*, vol. 51
- Albrecher, H., Finger, D. & Goffard, P.-O. (2022) Blockchain mining in pools : Analyzing the trade-off between profitability and ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 105.
- Bansaye, V. & Méléard, S. (2015) *Stochastic models for structured populations*. Springer.

3.3 Théorie du transport optimal et Probabilités

Intervenants : Nicolas Juillet, Jean Bérard, Denis Villemonais

Transport optimal – N. Juillet, 30h. Définit par Gaspard Monge en 1781 le problème des déblais et des remblais consiste à déplacer un « tas » $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ vers un « trou » $\nu \in$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, dont les formes sont prescrites, pour le moindre coût/effort global. Il se formule comme un problème d'optimisation sur l'ensemble des applications T choisies sous la contrainte que la loi de $T(X)$ épouse la forme du déblais ν , là où X est distribuée selon le remblais μ . Quant au problème de transport relâché de Kantorovich, introduit en 1942, on n'y minimise non plus seulement sur les couplages $(X, T(X))$ mais directement sur les lois jointes (X, Y) couplant μ et ν , (c'est à dire que μ et ν doivent être les marginales de X et Y), autorisant donc la masse transportée à partir $X = x$ à se diviser selon le noyau de transport $k_x(dy) = \text{Law}(Y \in dy | X = x)$.

Depuis près de 30 ans ces problèmes anciens sont de nouveaux au cœur des efforts de recherche pour une large communauté de mathématiciens et mathématiciennes spécialisés dans différents domaines tels que les probabilités, l'analyse et la géométrie, que ce soit à des fins théoriques ou pour des applications des mathématiques, dernièrement en particulier pour l'apprentissage statistique, le traitement des données et des images et plus généralement l'intelligence artificielle.

Nous nous y attacherons en premier lieu à traiter le problème de Monge–Kantorovich : existence et unicité des solutions, problème dual, monotonie cyclique. Cette étude sera accompagnée d'exemples incontournables : droite réelle, mesures discrètes, lois normales. . . Les distances du transport (distances de Wasserstein) et autres distances entre mesures de probabilités seront présentées en rapport avec des théorèmes limites. En fonction de l'avancée collective on abordera des thèmes particulièrement d'actualité tels que le transport entropique et l'algorithme de Sinkhorn, le transport martingale et le plongement de Skorokhod, les moyennes de Fréchet dans l'espace des mesures (barycentre de Wasserstein) et le transport multi-marginal, ou encore les développements dynamiques du transport optimal, incluant contrôle, EDPs et processus stochastiques.

Ordres stochastiques – J. Bérard, 10h. Les relations d'ordre stochastique fournissent différentes notions de comparaison entre mesures de probabilité, présentant à la fois un intérêt théorique et dans le cadre d'applications (modélisation du risque). Nous examinerons les notions classiques : domination stochastique, ordre convexe, ordre sur-modulaire, association positive, comonotonie, leur utilisation, et les diverses relations qui existent entre elles.

Nous renvoyons le lecteur aux références.

Convergence en distance de Wasserstein des processus de Markov – D. Villemonais, 10h

Dans cette partie du cours, nous nous intéressons à la vitesse et aux mécanismes de convergence des lois de certains processus de Markov vers leur mesure stationnaire, en utilisant les distances de Wasserstein W_1 et W_2 , issues de la théorie du transport optimal. Grâce au caractère polonais (séparable et complet) de la distance de Wasserstein, nous obtenons des résultats de stabilité et d'unicité de la mesure stationnaire, ainsi qu'une convergence robuste vis-à-vis des conditions initiales.

Nous illustrerons cette approche sur trois familles de processus : des processus de diffusion, des processus déterministes par morceaux et des systèmes de particules en interaction.

Références :

- Villani, C. (2009). *Optimal Transport : Old and New*. Springer.
- Hairer, M. & Mattingly, J.C. (2011) Yet Another Look at Harris' Ergodic Theorem for Markov Chains'. *Séminaire de Probabilités XLIII*, Springer.
- Müller, A. & Stoyan D. (2002) *Comparison methods for stochastic models and risks*. Wiley Series in Probability and Statistics.
- Rüschendorf L. (2013) *Mathematical risk analysis*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Dependence, risk bounds, optimal allocations and portfolios.

4 Master class

Les master class seront organisée la semaine du 20 avril 2026, et verront intervenir

- Ivan Nourdin, Université du Luxembourg (inourdin@gmail.com),
- Hansjoerg Albrecher, Université de Lausanne (hansjoerg.albrecher@unil.ch),
- Nathanaël Enriquez, Université Paris-Sud (nathanael.enriquez@gmail.com),
- Matthias Erbar, Universität Bielefeld (erbar@math.uni-bielefeld.de)

Chaque intervenant donnera un cours de quatre heures, scindé en deux séances de deux heures. Dans la mesure de leur disponibilité, nous proposerons des séances de discussion entre les intervenants et les étudiants, ainsi qu'entre les étudiants et les chercheurs (y compris des doctorants) du laboratoire.