Programme détaillé du Master 2 Mathématiques fondamentales 2018-2019

Projet de M2 2018-2019 : Analyse.

S1 : Cours avancé en équations différentielles (Loïc Teyssier et Nicolas Chevallier), Équations d'évolution non linéaires (Raphaël Côte), Théorie spectrale (Nalini Anantharaman et Zakaria Belhachmi),
S2 : Contrôlabilité et synchronisation de systèmes d'équations d'ondes (Bopeng Rao), Phénomènes limites en probabilités (Vlada Limic)

L'intitulé "Analyse" de ce programme de master regroupe un cours d'équations différentielles et systèmes dynamiques, deux cours d'EDP, un cours de théorie spectrale axé sur les EDP et comprenant une partie numérique théorique, et un cours de probabilités destiné aux analystes.

L'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP) est au coeur de la modélisation de nombreux phénomènes physiques, et a connu des avancées spectaculaires ces dernières décennies. Ce programme de master propose une introduction théorique à plusieurs classes d'équations qui jouent un rôle central en modélisation et physique mathématique : introduction à la théorie spectrale et diagonalisation d'opérateurs de type "Schrödinger", équations d'évolution non-linéaires, équations d'ondes et questions de contrôlabilité. La moitié du cours de théorie spectrale sera consacrée à un premier contact avec les problèmes numériques liés à la diagonalisation d'opérateurs.

Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont à la source de plusieurs branches des mathématiques contemporaines, allant de la théorie des surfaces de Riemann et des singularités jusqu'à des questions concrètes de modélisation, en passant par les différents aspects de la théorie des systèmes dynamiques. Le cours comprendra une partie sur la théorie des EDO (existence et unicité des solutions, linéarisation et stabilité, formes normales, monodromie) et une partie sur la théorie ergodique.

Un cours d'introduction à diverses techniques probabilistes (pour analystes) complètera la formation. On présentera en particulier la construction du mouvement brownien (lié de manière intime aux EDP paraboliques telles l'équation de la chaleur) et une introduction au calcul stochastique.

Cours avancé en équations différentielles

Nicolas Chevallier(Mulhouse) & Loïc Teyssier (Strasbourg)

L'enjeu de ce cours est de compléter les bases en équations différentielles dispensées en Licence et, pour certains étudiants, en M1.

Les équations différentielles ordinaires (plus généralement, les systèmes dynamiques continus) sont à la source de plusieurs branches des mathématiques contemporaines, allant de la théorie des surfaces de Riemann et des singularités jusqu'à des questions concrètes de modélisation et de simulation.
Un des problèmes majeurs est l'étude du comportement à long terme des trajectoires d'un système dynamique. Les formes normales jouent un rôle clef dans l'étude locale des

singularités et du devenir des trajectoires. Il s'agit de réduire le système à un système plus simple par changement de coordonnées. Les problèmes de linéarisation d'un champ de vecteurs, d'étude de la stabilité d'un système dynamique, de diagonalisation d'un opérateur, se ramènent tous finalement à des problèmes de conjugaison (formelle puis effective) à un système géométriquement plus simple.

Le cours commence par des rappels sur les systèmes linéaires, puis introduit des concepts plus avancés en s'attachant à étudier le développement asymptotique des solutions. Le contexte non linéaire est introduit à travers les champs de vecteurs, principalement en dimension 2 (réelle ou complexe). Les théorèmes (classiques) d'existence de trajectoires sont (re)vus, puis la notion de flot et son redressement, l'étude locale des singularités (formes normales et variétés stables) clôturant finalement cette première partie du cours.
La deuxième partie du cours se focalisera sur l'étude des trajectoires aux temps longs. Beaucoup d'équations différentielles ont des solutions dont l'évolution à long terme semble imprévisible. La théorie ergodique permet de rendre compte de ce caractère aléatoire. Les liens avec la dynamique topologique seront également présentés.

1. Étude locale des champs de vecteurs

(1) Systèmes linéaires : résolvante, classification des singularités, développements asymptotiques,
matrices de monodromie.
(2) Champs de vecteurs : théorèmes locaux d'existence de solutions, d'unicité, notion de trajectoire et de flot.
(3) Redressement des champs de vecteurs réguliers.
(4) Linéarisation et autres formes normales.
(5) Existence de variétés stables, instables, centrales au voisinage des singularités.
(6) Comportement à long terme des trajectoires dans le plan réel : théorème de Poincaré-Bendixson et XVIème problème de Hilbert.

2. Théorie ergodique

(1) Théorie ergodique, mesure invariante, ergodicité, mélange, théorème de Birkhoff, récurrence.
(2) Dynamique topologique, transitivité, minimalité, unique ergodicité.
(3) Exemple des automorphismes hyperboliques du tore.
(4) Quotients de SL(2 ;R) et SL(n ;R), ergodicité, application au flot géodésique.

Équations d'évolution non linéaires

Raphaël Côte

Le but de ce cours est de présenter certains résultats et outils de la théorie des EDP d'évolutions non linéaires. On étudiera plusieurs classes d'EDP, issues de la mécanique des fluides ou de la mécanique quantique.
On utilisera des méthodes de compacité pour construire des solutions faibles, par exemple pour l'équation de Navier-Stokes. On introduira la formule de Duhamel et la formulation intégrale des solutions. Dans le cadre de l'équation des ondes nonlinéaires, on construira des solutions dites mild de cette formulation intégrale (définies localement en temps) par point fixe de Banach, en utilisant des estimations d'énergie. On s'intéressera ensuite à des estimées

dispersives linéaire raffinées de type Strichartz, que l'on utilisera pour construire des solutions mild de l'équation de Schrödinger non linéaire.
On étudiera ensuite certains aspects de la dynamique en temps long. Pour des données petites, on montrera que les solutions sont définies globalement en temps et se comportent comme des solutions linéaire (scattering linéaire). On montrera que des données grandes peuvent donner lieu à des solutions qui explosent en temps fini, par un argument de type viriel. On s'intéressera enfin à l'existence d'ondes progressives, et à leur stabilité.

Références

[1] Thierry Cazenave et Alain Haraux. An Introduction to Semilinear Evolution, Oxford lecture series 13, 1998.
[2] Jean Leray. Sur le mouvement dâAZun liquide visqueux emplissant lâAZespace. Acta Mathematica 63 (1934), 193–248.
[3] Yvonne Choquet-Bruhat. ThéorÃlme dâAZexistence pour certains systÃlmes dâAZéquations aux dérivées partielles non linéaires. Acta Mathematica 88 (1952), 141–225.
[4] Marcus Keel et Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. American Journal of Mathematics 120 (1998), 955–980.
[5] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, et Walter Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I. Journal of Functional Analysis 4 no. 1, (1987), 60–197.

Introduction à la théorie spectrale : aspects théoriques et numériques

Nalini Anantharaman et Zakaria Belhachmi

Le cours est divisé en deux parties : une première partie dédiée à l'analyse spectrale et ses aspects théoriques et une deuxième partie consacrée à l'analyse spectrale en calcul de variations, l'analyse numérique et le calcul des éléments spectraux. Le cours se terminera par une application actuelle de l'analyse spectrale (par exemple au problèmes inverses).

Théorie spectrale : théorèmes fondamentaux et exemples

Cette partie du cours sera consacrée, d'une part aux théorèmes spectraux abstraits, d'autre part à des exemples issus de la physique mathématique.
La partie abstraite commencera par des rappels d'analyse fonctionnelle, principalement sur les opérateurs compacts. On démontrera ensuite le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints, compacts puis non bornés. On distinguera les différents types de spectre (purement ponctuel, singulier continu, absolument continu) et on abordera la théorie des perturbations à la Kato.
La suite du cours sera consacrée à l'étude du spectre sur des exemples issus de la géométrie et de la physique mathématique :

- laplacien dans un domaine compact : caractérisation variationnelle des valeurs propres ; propriétés de régularité des fonctions propres. Loi de Weyl.
- opérateurs de Schrödinger : détermination du spectre, discret ou continu, sur des exemples.

Comme prolongement possible, on pourra aborder les problèmes inverses et la question de l'isospectralité (construction de domaines non isométriques pour lesquels le spectre du laplacien est le même).

Le cours est complété par le séminaire qui sera consacré d'abord à des exercices puis à des exposés donnés par les étudiants.

Théorie spectrale en calcul des variations et applications

Le but de cette partie est d'introduire, de manière théorique, les méthodes de calcul des modes propres, les problèmes que cela engendre (précision, fiabilité, stabilité, ...).
Une partie en est consacrée aux algorithmes avancés dans ce domaine. L'approximation variationnelle est aussi étudiée en détail en partant du problème continu au discret, des résultats de convergence et des estimations d'erreur a priori sont données.
L'application à des problèmes classiques est ensuite développée. Une dernière partie sera consacrée à des problèmes plus difficiles et d'actualité en recherche.
Le séminaire relatif à cette partie du cours sera dédié à des compléments pour les cas un peu problématiques et une application qui pourrait constituée une ouverture sur des sujets de recherche.
Prérequis : cours de M1 d'analyse fonctionnelle. Il n'est pas nécessaire d'avoir déjà fait de l'analyse numérique ; cette partie du cours restera essentiellement théorique, même si les étudiants volontaires seront encouragés à essayer de faire tourner les algorithmes.

Contrôlabilité et synchronisation de systèmes d'équations des ondes

Bopeng Rao

L'objectif de ce cours est de présenter la théorie du contrôle de systèmes hyperboliques ainsi que les outils fondamentaux. On étudie d'abord les équations d'évolution par l'approche des semi-groupes, et on introduit la notion sur la contrôlablité exacte, l'observabilité ainsi que la Méthode d'Unicité Hilbertienne. Puis, on étudiera la non contrôlabilité exacte de systèmes d'équations des ondes avec moins de contrôles, et on introduit la notion de synchronisation exacte (une notion affaiblie de la contrôlablité exacte), dont l'étude est basée sur la théorie de la contrôlabilité exacte et la structure algébrique du couplage. Enfin, nous considérons la synchronisation approchée de systèmes d'équations des ondes avec minimum (nécessaire) de contrôles. Nous montrons que le critère de Kalman est nécessaire pour la contrôlabilité approchée de systèmes distribués en dimension infinie, et même suffisant, dans des cas spécifiques, grâce à de nouveaux théorèmes d'unicité.

Prérequis : l'analyse fonctionnelle, les espaces de Sobolev sont obligatoires, des connaissances sur les équations aux dérivées partielles linéaires sont bien souhaitées.
Bibliographie
[1] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Vol. 1, Masson, Paris, 1988.
[2] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 1983.
[3] I. Lasiecka ; R. Triggiani, Sharp regularity for mixed second-order hyperbolic equations of Neumann type, I. L2 nonhomogeneous data. Ann. Mat. Pura Appl. 157 (1990), 285-367.
[4] T-T. Li and B. Rao, Kalman-type criteria for the approximate controllability and approximate synchronization of a coupled system of wave equations, SIAM J. Control Optim. 54 (2016), 49-72.

Phénomènes limites en probabilités

Vlada Limic

Le cours s'adresse à des étudiants dont la formation principale est en analyse, mais qui souhaitent être en contact avec les probabilités.
La motivation principale du cours est de familiariser les étudiants avec les notions probabilistes importantes suivantes : la J1-topologie de Skorokhod, la convergence faible des processus par rapport à cette topologie ; le mouvement Brownien en tant que limite d'échelle des marches aléatoires et beaucoup d'autres processus stochastiques ; le mouvement Brownien en tant que paradigme de processus de Markov (en temps continu), le mouvement Brownien en tant que paradigme de martingale ; quelques éléments de calcul stochastique.
Les bases du conditionnement et de l'indépendance stochastique, de la théorie des chaînes de Markov, ainsi que des martingales en temps discret seront couvertes dans les préliminaires du cours.
Il existe des connexions notables entre le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles, et plusieurs d'entre elles seront progressivement indiquées . De nombreux exercices seront fournis, et une participation active à leur résolution sera l'ingrédient le plus important pour l'apprentissage. Si le temps le permet, à la fin du semestre d'autres sujets d'intérêt pour l'enseignant ou les participants seront couverts.
Prérequis : analyse réelle, théorie de la mesures incluse. Une familiarité avec la théorie élémentaire des probabilités est recommandée, mais pas indispensable.