M2 Mathématiques Fondamentales
Arithmétique et Géométrie Algébrique

Proposition de programme

année 2023/2024

Présentation générale

Pour le Master 2 de Mathéthématiques Fondamentales 2023/2024 nous proposons un programme cohérent de cinq cours liés à la géométrie algébrique et arithmétique, composé de deux cours « fondamentaux » au premier et trois cours « avancés » au second trimestre. L'ensemble des cours est conçu comme une initiation à la géométrie algébrique et arithmétique et permettra aux étudiants, après avoir effectué un mémoire adapté, d'entamer un doctorat dans le domaine. Les cours fondamentaux restent suffisamment généraux pour permettre, en fonction du choix des cours avancés et du sujet du mémoire, une orientation vers d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre ou la géométrie au sens plus large.
Une majorité des membres de l'équipe d'arithmétique et géométrie algébrique interviendra dans les cours du Master et la quasi totalité de l'équipe est disponible pour l'encadrement des mémoires.

Cours fondamentaux

Algebre homologique et faisceaux

Intervenants : Mauro Porta et Lie Fu

Dans ce cours on introduira les fondamentaux de l'algèbre homologique et de la théorie des faisceaux. Quand combinés, ces deux théories fournissent des outils extrêmement puissants qui peuvent être utilisés pour étudier des objets géométriques très complexes. On abordera les points suivants.

Partie I. Catégories, foncteurs, transformations naturelles. Notions de limite et de colimite. Plongement de Yoneda. Exemples.

Partie II. Catégories abéliennes, résolutions projectives et injectives. Notion de foncteur dérivé, comme par exemple Tor, Ext et cohomologie des groupes. Suite spectrale de Grothendieck.

Partie III. Notion de faisceau. Exemples : faisceaux des fonctions continues, différentiables, analytiques.
Cohomologie des faisceaux, cohomologie de Cech. Calcul de la cohomologie cohérente de $\mathbb{P}^n$.

Partie IV. Applications. Plusieurs possibilités sont envisagées : (1) le critère de régularité de Serre ; (2) le théorème de de Rham ; (3) notion de catégorie dérivée et la dualité de Grothendieck ; (4) notion de groupe fondamental et correspondance de monodromie

Géométrie Algébrique affine et projective

Intervenants : Giuseppe Ancona et Rutger Noot

Le but de ce cours est d'introduire les variétés algébriques au sens classique, c'est-à-dire comme solutions d'un système d'équations polynomiales à coefficients dans un corps fixé. L'étude géométrique de ces variétés se fera par des méthodes algébriques et inversement des résultats d'algèbre commutative auront une interprétation géométrique. Plusieurs notions empruntées de la géométrie différentielles, comme la dimension, l'espace tangent ou la régularité, auront un sens dans ce cadre, même pour des corps de base abstraits et sans topologie. On insistera sur les exemples géométriques : éclatements, morphismes de Segre et Veronese, existence d'un unique modèle projectif et lisse d'une courbe.

Cours avancés

Déformations de structures algébriques et quantification

Intervenants : Abdenacer Makhlouf et Pierre Clavier

L'objectif de ce cours est de décrire la théorie des déformations formelles introduite par Gerstenhaber au moyen des séries formelles et de la cohomologie

de Hochschild dans le cas des algèbres associatives. Il s'agit aussi de présenter sa version moderne basée sur le crochet de Gerstenhaber, structures L-infini et éléments de Maurer–Cartan.
Par ailleurs, dans ce cours nous présentons le lien entre quantification par déformation et les théories de jauge par le formalisme de Batalin–Villkoviski ainsi que la quantification par déformation des variétés symplectiques et plus généralement de Poisson à la Kontsevich.
Les autres approches des deformations basées sur des algèbres associatives commutatives quelconques et fonctorielle seront présentées.

Revêtements, groupe fondamental et théorie de la ramification

Intervenants : Carlo Gasbarri et Adriano Marmora.

Dans la première partie de ce cours on développera la théorie générale des revêtements des espaces topologiques. On expliquera le lien avec le groupe fondamental et l'analogie avec la théorie de Galois. On montrera que la théorie des revêtements étales en géometrie algébrique permet d'unifier les théories topologique et arithmétique.
La deuxième partie du cours sera consacrée à la théorie locale des revêtements. Un corps local est un corps muni d'une valuation discrète et complet pour la métrique induite par celle-ci. Le complété du corps des germes des fonctions dans un point P d'une courbe lisse C sur un corps k fournit l'un des exemples fondamentaux d'un corps local. Par le choix d'un paramètre local t de C en P, ce corps est isomorphe au corps $k((t))$ des séries de Laurent formelles. Une autre classe importante de corps locaux est de nature arithmétique : il s'agit du complété d'un corps des nombres en un idéal premier. Les corps de ce type sont des extensions finies d'un corps de nombres p-adiques. Dans cette deuxième partie, après des préliminaires sur les corps locaux, on étudiera leurs théorie de la ramification.

Variétés abéliennes

Intervenants : Emiliano Ambrosi et Arthur-César Le Bras

Une variété abélienne est une variété projective muni d'une loi de groupe. Ainsi, il s'agit d'une généralisation en dimension supérieure de la notion de courbe elliptique qui joue un rôle dans la preuve du grand théorème de Fermat

et en cryptographie par exemple. Les variétés abéliennes sont des objets intéressants tant du point de vue géométrique (car leur structure de groupe leur confère de nombreuses symétries) que du point de vue arithmétique (lorsqu'on les considère sur des corps finis ou des corps de nombres).
Le but du cours est de se familiariser avec les variétés abéliennes, d'abord sur le corps des nombres complexes, puis sur des corps finis et des corps de nombres. Cela sera aussi l'occasion de mettre en pratique les outils et les techniques de géométrie algébrique développés dans les cours du premier trimestre.