Programme détaillé du Master 2 Mathématiques fondamentales 2017-2018

1. Présentation du Master :introduction à la Géométrie Algébrique

Dans ce Master on se propose de présenter les outils fondamentaux de la géométrie algébrique moderne. L'objectif est de présenter la géométrie algébrique d'un côté de façon concrète à travers des exemples et d'un autre côté d'introduire le langage général et les principaux outils de la géométrie projective, des schémas, des revêtements des schémas de Dedekind et des groupes algébriques.
Le langage de la théorie, souvent abstrait et de difficile approche, est présenté d'abord, au premier trimestre, à travers un étude explicite : un cours de *géométrie algébrique affine* présentera plusieurs outils fondamentaux d'algèbre commutative à travers l'étude explicite des variétés affines. Le deuxième cours du premier trimestre présentera les outils de base de la *géométrie algébrique des courbes projectives*.
Avec le bagage acquis au premier trimestre, l'étudiant pourra attaquer le deuxième trimestre où des cours plus généraux seront présentés : Un cours de *géométrie algébrique* présentera le langage général de la théorie en introduisant la théorie des variétés algébriques projectives et la théorie générale des schémas. Un cours sur la *théorie des revêtements des courbes* présentera la théorie des revêtements abéliens des courbes et des schémas de Dedekind, d'abord en décrivant la théorie globale non ramifiée sur une courbe projective et sa relation avec la Jacobienne et après en présentant la théorie locale des revêtements d'un anneau de valuation discrète. Le dernier cours (offert par l'Université de Mulhouse) *théorie des groupes algébriques* présentera la théorie des groupes algébriques et la classification des algèbres de Lie semi-simples.
Le Master sera probablement précédé d'une Master Class avec le titre "Elementary Examples in Algebraic Geometry".
Cette Master class, adressée surtout aux étudiants de M1, présentera quelques exemples et de phénomène en géométrie algébrique et pourra motiver la participation au Master.

Voici les possibles mini cours qui peuvent faire partie de la Master Class :
1) Les Surfaces Cubiques de l'espace projectif (introduction aux variétés rationnelles).
2) Morphismes inséparables et morphismes d'Artin Schreier (introduction aux revêtements en caractéristique positive).
3) Le Théorème d'irréducibilité de Hilbert (Introduction aux méthodes géométriques pour l'étude des groupes de Galois).

2. présentation des cours du Master

2.1. Premier trimestre.

2.2. Introduction aux schemas affines.
Par C. Huyghe Noot.

Introduction : En géométrie arithmétique, le formalisme des schémas, dû à Alexander Grothendieck, a obtenu des succès indiscutables,
que ce soit dans la théorie des déformations en géométrie algébrique, ou pour la démonstration du théorème

de Fermat. Dans la nature, c’est-à-dire pour des questions natuelles en géométrie arithmétique, on rencontre des schémas.

Ce cours se veut une introduction aux schémas affines, c’est-à-dire les schémas associés (comme spectre) à un anneau commutatif unitaire. La notion de schéma affine est une notion locale : pour fabriquer un schéma il faut recoller des schémas affines. L’étude locale des schémas passe donc par les schémas affines.

A une famille $(f_1, ...,f_d)$ de d polynômes en N variables à coefficients dans Q on peut associer un schéma affine.
Un point de ce schéma affine sur une clôture algébrique de Q est une solution du système d’équations
$f_1(x_1,...,x_N)=...=f_d(x_1,...,x_N)=0$.

A un corps on peut associer un schéma réduit à un point fermé, à l’anneau des entiers on peut associer un schéma dont les points fermés correspondent aux nombres premiers.

Description du cours

Les théorèmes classiques d’algèbre commutative constituent un socle indispensable, qui permet de décrire la théorie des schémas affines. Une bonne partie de ce cours sera donc consacrée à l’algèbre commutative classique. Nous verrons comment ces énoncés parfois abstraits s’éclairent quand on les présente géométriquement, avec le formalisme des schémas. De nombreux exemples seront donnés en TD venant de la géométrie algébrique (locale) comme des courbes, ou des déformations de courbes.

Plan du cours

-Outils de base d’algèbre commutative : anneaux noethériens, dimension, produit tensoriel, localisation. Module localement libre sur un anneau. Limite inductive.
-Théorème des zéros de Hilbert, définition d’un schéma affine, composantes irréductibles, dimension d’un schéma affine, point générique d’un schéma affine. Recouvrement principal d’un schéma affine. Sous-schéma fermé d’un schéma affine (cas particulier : caractérisation des point fermés d’un schéma affine), produit cartésien de schémas affines. Exemples. Changement de base (fibre générique et fibre spéciale d’un schéma sur l’anneau des entiers p-adiques).
-Calcul différentiel sur les schémas affines : module des différentielles de Kälher, suites exactes usuelles, morphismes étales, critère jacobien, coordonnées locales.
-Fermeture intégrale, schémas réguliers, anneaux locaux réguliers et caractérisation. Complétion I-adique d’un anneau (limite projective). Application à l’étude locale des courbes lisses (différentielles relatives et définition de la ramification) ou des familles de courbes.
-La fin du cours sera consacrée à l’étude de la dimension des morphismes plats de schémas affines (de type fini sur un corps).

4-Références

-Atiyah, Mac Donald. Commutative algebra
-R. Hartshorne. Algebraic Geometry
-Q. Liu. Algebraic Geometry and arithmetic curves

2.3. Courbes algébriques.

Par G. Ancona et O. Benoist.
Ce cours est une introduction à l'étude des courbes algébriques. On travaillera sur un corps algébriquement clos arbitraire. On abordera le point de vue plongé concret (courbes planes, courbes hyperelliptiques) et le point de vue intrinsèque (courbe abstraite, corps de fonctions) et on étudiera leurs interactions. L'objectif principal du cours est le théorème de Riemann-Roch et des applications de base de celui-ci.
Courbes algébriques affines, lissité. Espace projectif, courbes algébriques projectives. Exemple
des courbes planes. Théorème de Bezout. Normalisation. Équivalence entre courbes projectives lisses connexes et corps de type -ni de degré de transcendance 1. Formes différentielles,
genre. Revêtements, rami-cation, théorème de Riemann-Hurwitz. Exemple des courbes hyperelliptiques. Diviseurs, équivalence linéaire. Théorème de Riemann-Roch. Application à la classification des courbes de petit genre (0,1,2,3).

Références :

Fulton, Algebraic curves.
Perrin, Géométrie algébrique - une introduction.

2.4. Deuxième trimestre.

2.5. Introduction à la géométrie algébrique.

Par D. Brotbek et R. Laterverer.

L'objectif de ce cours est de donner une introduction, accessible et concrète, à la géométrie des variétés projectives et à la théorie des schémas. Le cours sera illustré par de nombreux exemples et des constructions classiques. L'une des motivations principales est de pouvoir aborder des questions, d'origines classiques mais au coeur de la recherche actuelle, concernant les notions de rationalité et d'unirationalité.

Les thèmes abordés seront les suivants : Espace projectif, variété projective, schéma projectif, schémas, formes différentielles, espace tangent, diviseurs et fibrés en droites, nombres d'intersection, éclatement, application rationnelle, application birationnelle, variété rationnelle/unirationelle/uniréglée.

Références

[1] Joe Harris, Algebraic Geometry : A First Course.
[2] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry.
[3] Igor R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1 & 2.

2.6. Revêtements des courbes et théorie de la ramification des corps locaux.

Par C. Gasbarri et A. Marmora.

Dans la première partie de ce cours on décrira la théorie des revêtements non ramifiés des courbes algébriques et on se concentrera sur la théorie des revêtements abélien : on en donnera d'abord une description topologique et ensuite on verra comment on peut réaliser la théorie algébrique. On décrira la Jacobienne d'une courbe algébrique, ses propriétés et sa construction, d'abord sur le corps des complexes et après sur un corps quelconque. On décrira donc le rapport entre revêtements abéliens non ramifiés de degré premier à la caractéristique et fibrés en droites de torsion.
Dans la deuxième partie on expliquera la théorie locale des revêtements.
Un corps local est un corps muni d'une valuation discrète et complet pour la métrique induite par celle-ci. Le complété de l'anneau des germes des fonctions dans un point P d'une courbe lisse C sur un corps k, fourni l'un des exemples fondamentales de corps local : par le choix d'un paramètre locale t de C en P, ce corps est isomorphe au corps $k((t))$ des séries formelles de Laurent. L'autre exemple de corps local est de nature arithmétique, il s'agit du complété d'un corps des nombres en un idéal premier : c'est en effet une extension finie du corps des nombres p-adiques.
Dans cette deuxième partie, après des préliminaires sur les corps locaux, on va étudier leurs théorie de la ramification. On va définir la filtration de ramification sur le groupe de Galois d'une extension des corps locaux et prouver que dans le cas d'une extension abélienne les sauts de cette filtration sont entiers (théorème de Hasse-Arf).

Références :

Milne : Jacobian Varieties.
Serre, Corps Locaux, (première partie).

2.7. Introduction aux groupes algébriques. (Cours de l'Université de Mulhouse)
Par D. Panazzolo et E. Remm.

Le but de ce cours est de présenter les concepts de base de la théorie des groupes algébriques. Nous allons suivre le livre de Humphreys, Linear algebraic groups. Les principaux sujets traités seront :

- Groupes algébriques affines ;
- Algèbres de Lie ;
- espaces homogènes ;
- Décomposition de Jordan ;
- Groupes résolubles et sous-groupes de Borel ;
- Structure des groupes réductifs et systèmes de racines.