Programme détaillé du Master 2 Mathématiques fondamentales 2019-2020

Objectifs

Introduire des outils fondamentaux en algèbre et topologie : algèbre homologique, topologie algébrique et théorie des représentations des groupes et des algèbres de dimension finie.

Proposition de cours

2.1 **S1 / Eléments de topologie algébrique (Christine Vespa et Pierre Guillot)**

Première partie (C. Vespa) : Algèbre homologique et (co)homologie des groupes

(1)Notions de théorie des catégories
Catégories, foncteurs, catégories abéliennes

(2)Algèbre homologique
Suite exacte, foncteur exact, complexe de chaînes, résolution projective et injective, foncteurs dérivés, Tor et Ext, complexes doubles, théorème des coefficients universels.

(3)Homologie et cohomologie des groupes
Invariants et co-invariants, définitions comme Tor et Ext, (co)homologie d'un produit de groupes, (co)homologie de sous-groupes (Lemme de Shapiro, transfert), structures produits (produit croisé, produit cup)

(4)Suites spectrales
Définition, suite spectrale classique (associées à un complexe double et de Grothendieck), suite spectrale de Hochschild-Serre.

Références :

- Brown, Cohomology of groups. Graduate texts in Mathematics
- Hilton, Stammbach, A course in homological algebra. Graduate texts in Mathematics
- Weibel, An introduction to homological algebra. Cambridge study in advanced mathematics

Deuxième partie (P. Guillot) : techniques simpliciales

(1)Complexes simpliciaux, liens avec les posets, construction élémentaire du classifiant d'un groupe fini. Homologie simpliciale, invariance par homéomorphisme (via l'homologie de Cech).

(2)Introduction des ensembles simpliciaux, leur réalisation topologique. Construction de ces ensembles simpliciaux par le nerf d'une catégorie, et des morphismes par les foncteurs ; exemple du classifiant d'un groupe (de façon plus directe !), de la K-théorie de Quillen. Homologie d'un ensemble simplicial (on retrouve la construction "bar" dans le cas de BG), invariance par homotopie simpliciale.

(3)L'ensemble simplicial "singulier" d'un espace topologique, axiomes d'Eilenberg et McLane, homologie des CW-complexes, conséquences (par exemple le fait que l'homologie d'un ensemble simplicial ne dépend que de sa réalisation topologique, et en fait seulement du type d'homotopie de celle-ci). L'adjonction.

(4)S'il reste du temps, on peut parler de catégorie de modèles à la Quillen.

Références :
Munkres, Elements of algebraic topology
Friedman, Elementary illustrated introduction to simplical sets
Dwyer, Classifying spaces and homology decomposition

2.2 **S1 / Théorie de Lie et représentations (Sofiane Souaifi et Dragos Fratila)**

Première partie (Sofiane Souaifi) : Groupes et représentations

(1)Groupes compacts : mesure de Haar, représentations, semi-simplicité, théorème de Peter-Weyl.

(2)Groupes et algèbres de Lie : exponentielle, Ad, ad. Groupe fondamental et revêtement universel.

(3)Groupes linéaires : groupes classiques (S1)n, Rn, R∗, GL(n),SL(n),PSL(n),SU(n),SO(n),Sp(2n),GSp(2n),SU(p,q),SO(p,q)

(4)Correspondance de Lie.

(5)Algèbres enveloppantes et Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

(6)Représentations de sl(2,C), SU(2) et SO(3).

(7)Représentations de SL(2,R).

Deuxième partie (Dragos Fratila) : Algèbres de Lie semisimples sur C

(1)Algèbres de Lie résolubles, nilpotentes, réductives et idéaux

(2)Algèbres de Lie semisimples : décomposition de Jordan, forme de Killing.

(3)Sous-algèbres de Cartan, de Borel et décomposition triangulaire.

(4)Systèmes de racines, groupe de Weyl, poids dominants.

(5)Modules de plus haut poids, modules de Verma et modules simples.

(6)Formule de caractères de Weyl et théorème de Kostant. Exemples pour les algèbres classiques.

Références :
- A. Borel. Linear algebraic groups.

- D. Bump. Automorphic forms and representations.
- A. Knapp. Lie groups beyond an introduction.
- A. Robert. Introduction to representation theory of compact and locally compact groups.
- J.-P. Serre. Algèbres de Lie semisimples.
- S. Sternberg. Group theory and physics.

2.3 **S2 Variétés hyperbolique et groupes de Bloch. (Benjamin Enriquez et Vladimir Fock.**

(1)Produits tensoriels de groupes abéliens. Constructions des invariants, invariant de Dehn des polyèdres dans R.
Référence : [S] [C]

(2)L'espace hyperbolique H3. Modèles. Bord de H3. Plans géodésiques.
Polyèdres dans H3.
Référence : [T]

(3)Invariant de Dehn hyperbolique. Extension de l'invariant de Dehn aux polyèdres idéaux. L'espace de tétraèdres idéaux. Invariant de Dehn et volume d'un tétraèdre idéal.
Référence : [DS]

(4)3-variétés hyperboliques complètes. Volume d'une 3-variété hyperbolique.

(5)Construction de 3-variétés hyperbolique à partir de tétraèdres idéaux recollés. Théorème de Thurston : toute 3-variété hyperbolique complète non compacte est obtenue ainsi.
Référence : [T]

(6)Relation pentagonale. Groupe de Bloch de C et de Q. Construction d'un élément du groupe de Bloch à partir d'une 3-variété. Factorisation de l'application volume par le groupe de Bloch.

(7)Notion de variété K-symplectique, de sous-variété K-lagrangienne. Construction d'un élément du groupe de Bloch à partir de l'intersection de sous-variétés lagrangiennes.
(8)onstruction de 3-variétés hyperboliques fibrées sur le cercle à partir d'une classe de conjugaison dans le groupe des difféotopies d'une surface.
Calcul de l'invariant à valeur dans le groupe de Bloch à partir d'un élément du groupe de difféotopies.
Référence : [GGD]

(9)Généralisation et liens.

Références :

- [S] R. Schwartz, Dehn's Dissection Theorem., R. Schwartz, "The Dehn-Sydler Theorem Explained". homepage of R.Schwartz.
- [DS] J.L. Dupont, C.H. Sah Scissors congruences. II. J. Pure Appl. Algebra 25 (1982), no. 2, 159–195.
- [C] P.Cartier Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert. Séminaire Bourbaki, Exp. No. 646, Vol. 1984/1985. Astérisque, 133-134 (1986), 261-288.

- [GGD] T. Dimofte, M. Gabella, A. B. Goncharov K-Decompositions and 3d Gauge Theories.arXiv:1301.0192v2
- [T] W.Thurston Three-dimensional geometry and topology Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1997.

2.4 **S2 / Représentations et carquois - Théorie d'Auslander-Reiten (Pierre Baumann et Frédéric Chapoton)**

Description de la première partie : Modules sur un anneau. Modules simples, indécomposables, semi-stables, théorèmes de Jordan-Hölder, Krull-Schmidt, Harder-Narasimhan. Modules injectifs et projectifs, Ext, Tor. Progénérateurs, projectivisation, équivalence de Morita. Toute algèbre basique scindée est une algèbre de carquois avec relations. Type de représentation d'une algèbre (fini, domestique, sauvage).

Deuxième partie : Introduction aux méthodes de la théorie d'Auslander-Reiten, fondamentale en théorie des représentations des algèbres non semi-simples. En détail : suites exactes presque-scindées, foncteur d'Auslander-Reiten, carquois d'Auslander-Reiten, algorithme du tricot.

Références :

- Auslander, Reiten et Smalø (1997) Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics
- voir aussi Lidia Angeleri Hugel An Introduction to Auslander-Reiten Theory (https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/ictp2006/lecturenotes/angeleri.pdf)
- Happel, riangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

2.5 **S2 / Déformation et quantification (Martin Bordemann et Abdenacer Makhlouf)**

L'objectif de ce cours est de décrire la théorie des déformations formelles introduite par Gerstenhaber et les différents objets algébriques qui lui sont liés. Il s'agit aussi d'introduire la quantification par déformation en lien avec la physique et la théorie de formalité introduite par Kontsevich.

(1)Déformations formelles d'algèbres associatives, cohomologie de Hochschild, obstructions (théorie de Gerstenhaber).

(2)Algèbres de Poisson, mécanique classique, calcul symbolique, mécanique quantique, formules simples de quantification par déformation.

(3)Graduations, algèbres de Lie différentielles graduées, crochet de Gerstenhaber, crochet de Schouten.

(4)Coalgèbres coassociatives cocommutatives counitaires coaugmentées connexes, morphismes, codérivations, formules de convolution, preuve pour les crochets de Gerstenhaber et Schouten.

(5)Structures L1, formalité, éléments de Maurer-Cartan, liens avec les déformations.

(6)Cohomologie de Hochschild des polynômes.

(7)Graphes de Kontsevich et application à la formalité.

3. **Master Class (Février 2020)**

Cette Master Class se déroulera pendant les vacances de février 2020. L'idée est de proposer plusieurs cours (3 ou 4) sur différentes thématiques complétant ceux du M2. Ces cours seront dispensés par des intervenants extérieurs à l'université de Strasbourg.